UFT

Mestrado em Desenvolvimento Regional

Nivelamento em Estatística

Introdução a Estatística, Teoria dos Conjuntos e Probabilidade

Prof. Dr. Adriano N. da Paixão

Definição de Estatística

- A Estatística é um conjunto de técnicas e/ou metodologias pelas quais os dados de natureza quantitativa são coletados, organizados, apresentados e analisados.
- A estatística pode ser dividida em duas partes:
  - A estatística descritiva
  - A estatística indutiva ou inferência estatística

Fases do método estatístico

- Quando se deseja fazer um estudo estatístico qualquer as seguintes fases, em geral são observadas:
  - Definição do problema;
  - Planejamento (elaboração de questionário, piloto da coleta, preparação logística, definição se a pesquisa será amostral ou censitária, custos);
  - Coleta dos dados ;
  - Apuração ou tabulação dos dados;
  - Apresentação e analise dos dados (tabelas, gráficos, mapas e quadros); e
  - Análise e interpretação dos dados

Estatística descritiva

- A estatística descritiva como o próprio nome diz refere-se as técnicas de sistematização, sintetização e descrição dos dados numéricos.
  - Exemplo:
    - O volume de vendas mensais de um produto durante um ano pode ser descrito de forma significativa através da elaboração de um diagrama de barras ou de um gráfico de linhas.

Inferência estatística ou estatística dedutiva

- Compreende as técnicas por meio das quais são tomadas decisões sobre uma população estatística, decisões estas baseadas unicamente na observação de uma amostra. Devido ao fato de que tais decisões são tomadas em condições de incerteza, requer-se, na estatística inferencial o uso de conceitos ligados a probabilidade.

Proporção, razão e porcentagem

- Apesar dessas medidas em geral serem associadas à matemática, do ponto de vista da estatística elas são medidas muito utilizadas para distinguir e estabelecer comparações entre diversos grupos.

Proporção

- Expressa uma relação – ou seja em relação a um determinado número quantas pessoas fazem parte de um subconjunto ou não.
- Certo número de pessoas foi classificado em quatro categorias mutuamente exclusivas e exaustivas e todas elas deveram ser classificadas:

$N_1 =$ número de alunos da UFT que jogam futebol - categoria 1

$N_2 =$ número de alunas da UFT que jogam futebol - categoria 2

$N_3 =$ número de alunos que não praticam futebol - categoria 3

$N_4 =$ número de alunas que não praticam futebol - categoria 4

$N_T = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$

A proporção é dada pela seguinte relação :

$P_n = N_n / N_T$ de forma que o somatório de todas as proporções seja igual a 1.

$$\sum_1^k P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots + P_k = \sum_1^k \frac{N_k}{N} = \frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N} + \frac{N_3}{N} + \frac{N_4}{N} + \ldots \frac{N_k}{N} = 1$$

Porcentagem

- As porcentagens são obtidas a partir do cálculo das proporções, simplesmente multiplicando-se o quociente por 100.
- A somas das proporções é sempre igual a 1 e de maneira análoga a soma das porcentagens é igual a 100.
- Proporção e porcentagem são muito utilizadas na contabilidade e análise de balanços em geral.

Razão

- A razão de um número A em relação a outro número B define-se como A dividido por B. A quantidade precedente é colocada no numerador, enquanto a quantidade seguinte irá para o denominador. Diferentemente da proporção, a razão pode resultar em um número maior do que 1.
- A razão é muito utilizada na contabilidade: exemplo saber o grau de endividamento de uma empresa ou de uma pessoa – é uma razão.

Teoria dos Conjuntos – breve revisão

- Conceito e notação
  - A palavra conjunto surge da idéia de coleção, classe, grupo ou lista de elementos – que podem ser números, pessoas, objetos, letras, etc.
  - Em matemática a idéia de conjuntos é análoga, os conjuntos com um único elemento (conjuntos unitários), conjuntos sem nenhum elemento (conjuntos vazios) e conjuntos com um número infinito de elementos.
  - Os conjuntos são designados através de letras maiúsculas, e um conjunto vazio é designado por meio do símbolo ϕ

Definição de um conjunto

- Um conjunto é definido se todos os seus elementos forem indicados, um após o outro, separados por vírgulas e entre chaves, ou se for dado o critério, também entre chaves, mediante o qual é possível dizer, dado um elemento se ele pertence ou não ao conjunto:
- Se *a* é um elemento do conjunto S, isto é, se *a* pertence a S, escrevemos

$a \in S$; se b não é elemento do conjunto

S, isto é, se b não pertence a S, escrevemos $b \notin S$.

Exemplos

$$A = \{2,3,4\} \text{ e}$$

$$B = \{x \mid x \text{ é inteiro e positivo}\}$$

Relação entre conjuntos

- Dizemos que dois conjuntos, A e B, são iguais e escrevemos A = B se ambos contêm exatamente os mesmos elementos, isto é, se todo elemento de A também é elemento de B e todo elemento de B é também elemento de A.
  - Exemplo:

$$A = \{2,3,4\}, C = \{4,3,2\} \text{ e } D = \{4,5,6\}, \text{ temos :}$$

$$A = C, A \neq D \text{ e } C \neq D.$$

- Se todo elemento de A é também um elemento de S, A é um subconjunto de S e escrevemos: $A \subset S$
- De acordo com essa definição, todo conjunto é subconjunto de si próprio e, por convenção, todo conjunto tem como subconjunto o conjunto vazio

Operação com conjuntos

- A união de dois conjuntos, A e B, indicada por $A \cup B$, é o conjunto cujos elementos pertencem a A, a B, ou a ambos.

$$A \cup D = \{2,3,4,5,6\} = S$$

$$A \cup B = B$$

- A interseção de dois conjuntos, A e B, indicada por $A \cap B$, é o conjunto cujos elementos pertencem tanto ao conjunto A como ao conjunto B, isto é, dos elementos comuns aos dois conjuntos.

$$A \cap D = \{4\}$$

$$A \cap B = A$$

- Se $A \cap B = \phi$, isto é, se A e B não possuem elementos comuns, dizemos que A e B são conjuntos disjuntos.

Diagramas de Venn

Figura 1

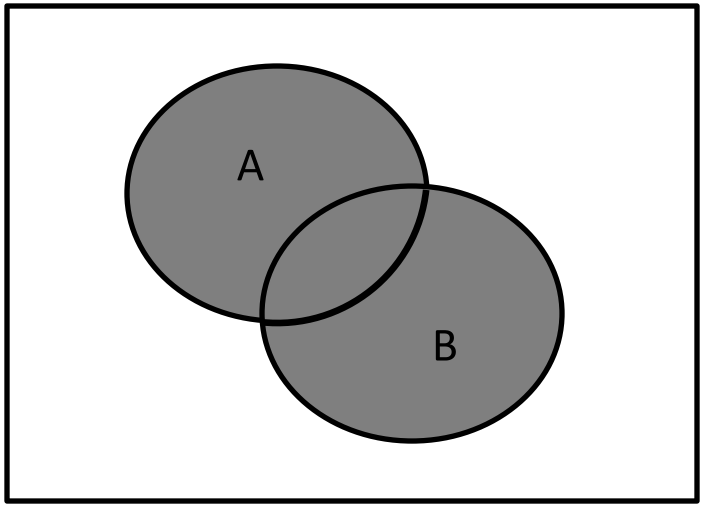


Figura 2

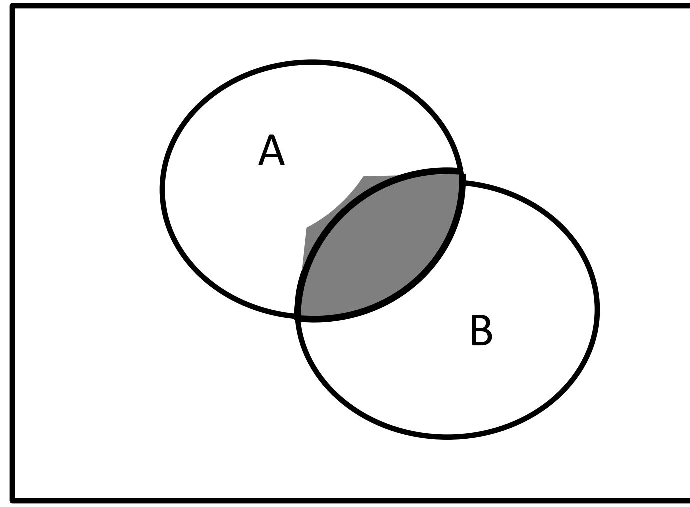
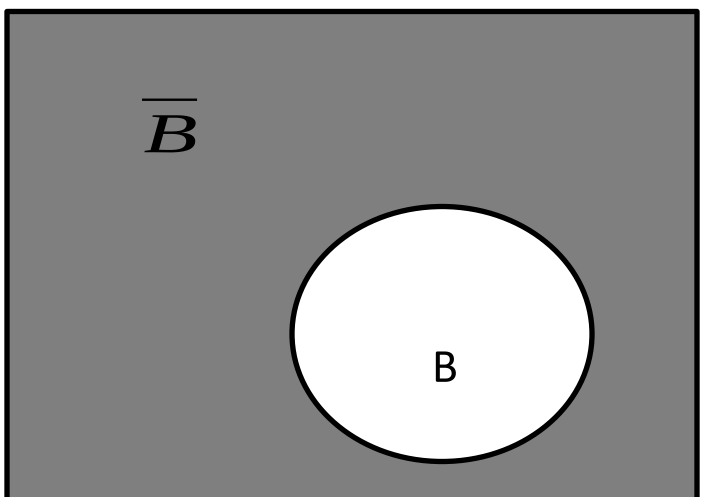


Figura 3



$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

União e interseção são operações cumutativas

População e amostra

- O conjunto de todos os elementos que possuem determinada característica em comum constitui uma população ou universo. Todo subconjunto não-vazio e menor do que a população constitui uma amostra dessa população.
- O termo população refere-se tanto aos indivíduos como às medidas ou aos valores associados a esses indivíduos.
- A população pode ser finita (exemplo: as crianças de uma cidade) ou infinita (exemplo: resultados obtidos a partir do lançamento de um dado indefinidamente).
- Outros exemplos.

População *versus* Amostra

- A População (ou Universo ou Censo) constitui o conjunto de todos os indivíduos os quais desejamos estudar.
  - Exemplos.
- Quanto ao número de elementos de uma população, a mesma pode ser finita ou infinita. Ex. pesagem.
- A amostra constitui-se de uma parte (ou subconjunto) do conjunto da população a qual se deseja estudar.
  - Exemplos.
- Mas se o Universo é constituído pela totalidade dos indivíduos por que utilizamos a amostra?
  - Custo
  - Dificuldade no tratamento dos dados

População *versus* Amostra

- Às medidas características de uma população denomina-se parâmetros da população e normalmente utilizam-se caracteres gregos.

- Às medidas características de uma amostra denomina-se estatísticas da amostra e normalmente utilizam-se caracteres latinos.

Variável

- A característica que se deseja estudar de uma determinada população ou amostra chamamos de variável.
- As variáveis podem ser de dois tipos:
  - Discretas
  - Contínuas

Variáveis discretas

- Uma variável discreta pode ter valores observados somente em pontos isolados ao longo de uma escala de valores.
  - Por exemplo o número de alunos da UFT só pode assumir valores inteiros maiores do que zero; Número de domicílios do Brasil. Em geral as variáveis contínuas estão associadas a processos de contagem.

Variáveis continuas

- Uma variável continua pode assumir quaisquer valores, positivos, negativos, fracionado ou não.
  - Por exemplo: a temperatura da cidade de Palmas ao longo do dia. O número médio de pessoas por domicílios. Em geral as variáveis continuas estão associadas a processos de medição (peso, altura, etc.).

Probabilidade

Experimento, espaço amostral e eventos

- Denominamos experimento todos fenômeno ou ação que geralmente pode ser repetido e cujo resultado é casual ou aleatório.
  - Exemplo: jogar um dado.

$$E = \{1,2,3,4,5,6\}$$

- Qual o espaço amostral relativo ao lançamento de duas moedas?

$$E = \{KK, KC, CK, CC\}$$

- Se estamos interessados apenas no número de caras obtidas, qual seria o espaço amostral

$$E = \{0,1,2\}$$

- Denominamos evento todo o subconjunto do espaço amostral, e chamamos de evento simples ou elementar todo subconjunto unitário do espaço amostral.

Definição clássica de probabilidade

- Se um espaço amostral é constituído por n eventos mutuamente exclusivos e igualmente prováveis e se n_A desses eventos têm o atributo A, então a probabilidade de A é:

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

- Qual a probabilidade de ao se lançar um dado homogêneo, ocorrer um dos eventos possíveis, entre 1 e 6?

Probabilidade como limite de uma freqüência relativa

- Denominamos freqüência relativa do evento A ao quociente entre o número de vezes em que A ocorreu (n_A) e o número total de eventos observados.
- Podemos definir probabilidade de A como o limite da frequência relativa de A, quando o número de eventos observados tende a infinito, isto é,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

Exemplo

Sejam K e C os eventos cara e coroa, respectivamente, do lançamento de uma moeda, uma única vez. Se a moeda for feita de material homogêneo, pode se estebelecer, por simetria, P(K) = P(C) = 0,5. Entretanto, se a moeda não for homogênea, para obter P(K), deve-se lançar a moeda um número suficientemente grande de vezes para calcular n_k/n, onde n_k é o número de vezes que saiu cara em n lançamentos da moeda.

- O conceito de probabilidade é bastante útil na prática. As casas de jogos e companhias de seguros dependem da estabilidade, a longo prazo, de frequências relativas. Entretanto, a definição não é satisfatória do ponto de vista matemático, porque não é possível uma interpretação rigorosa sem usar o próprio conceito de probabilidade.

- Outro inconveniente dessa definição é que ela se limita aos casos em que o número de casos pode crescer indefinidamente. Afirmações como “a probabilidade de que haja um guerra nuclear no próximo anos é de 0,05”, que envolvem uma probabilidade subjetiva, não podem ser interpretados como limites de freqüências relativas.

O conceito moderno de probabilidade

- Seja *E* um espaço amostral e seja *A* qualquer evento em *E*, isto é, *A* é um subconjunto de E. Então, por definição, a probabilidade de ocorrer *A* é dada pela medida de *A*, nas seguintes condições:

1) A medida do universo é 1

$$\mathrm{P}(E) = 1. \tag{2.2}$$

2) A medida é não-negativa

$$P(A) \geq 0 \tag{2.3}$$

3) Se A e B são dois eventos disjuntos,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{2.4}$$

- Desses postulados, segue-se que:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- O caso mais simples é aquele em que um universo é constituído por n eventos elementares e, por razões de simetria, sabemos que esses eventos são igualmente prováveis, nessas condições, a probabilidade de cada evento elementar é 1/n.

Propriedades

a) A probabilidade do evento certo é igual a 1:

$$P(S)=1$$

b) A probabilidade do evento impossível é igual a zero:

$$P(\varnothing)=0$$

c) A probabilidade de um evento E qualquer $(E \subset S)$ é um número real P(E), tal que:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

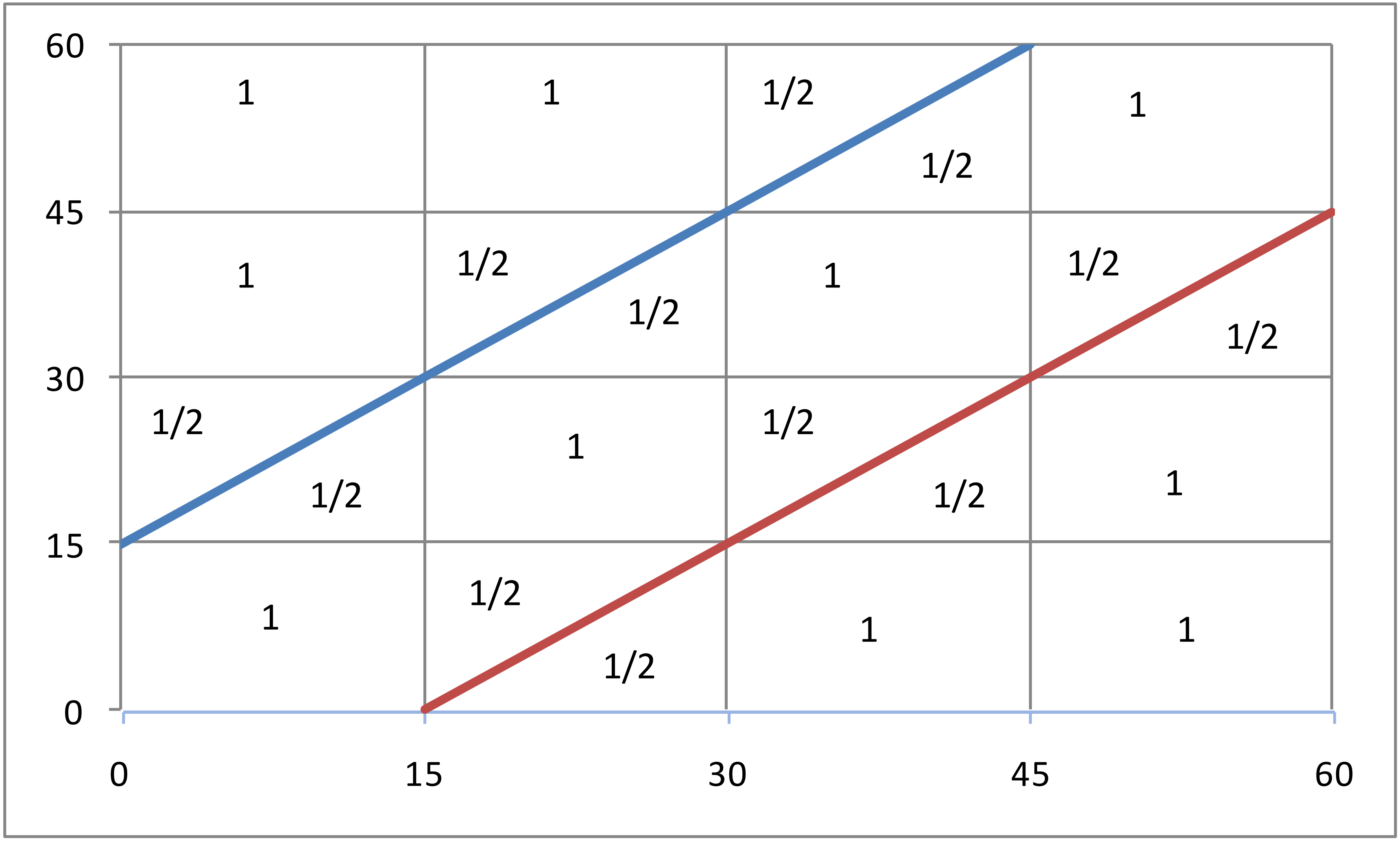
d) A probabilidade de um evento elementar E qualquer é, lembrando que n(E)=1:

$$P(E) = \frac{1}{n}$$

Exemplo: idéia de probabilidade como um conjunto

Duas pessoas combinam um encontro entre às 17 e às 18 horas; uma não esperará pela outra mais do que 15 minutos; nenhuma chegará ao local de encontro antes das 17 horas nem ficará depois das 18 horas, determine a probabilidade das duas pessoas se encontrarem.

- Consideremos um sistema de eixos cartesianos ortogonais, marcando nos eixos coordenados os momentos de chegada de cada indíviduo ao loca de encontro. O conjunto (universo) de todas as combinações possíveis corresponde ao quadrado da figura a seguir. Haveria encontro no caso dos pontos pertencentes à faixa sombreada nesta figura, delimitada pelas retas y-x=15 e x-y=15



Calculando a relação entre as áreas obtemos P=7/16=0,4375 ou 43,75% de chance deles se encontrarem.

A probabilidade do complemento e o Teorema da Soma

- Teorema: Se *E* o espaço amostral. Então, a probabilidade de que A não ocorra é dada por

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad (2.5)$$

- Teorema da soma: se *A* e *B* são dois eventos do espaço amostral *E*, então a probabilidade de que ocorra ou *A* ou *B* é:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Como P(A) + P(B) é a soma das probabilidades dos eventos em A mais a soma das probabilidades dos eventos em B, P(A) + P(B) inclui as probabilidades dos pontos do conjunto $\boldsymbol{A \cap B}$ duas vezes. Logo, subtraindo $P(A \cap B)$, temos $P(A \cup B)$.

Corolário: Se A e B são disjuntos, i.e., $\boldsymbol{A \cap B = \varnothing}$

Então, $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

Exemplo

A: resultado par, isto é, $A=\{2,4,6)$

$\overline{A}$: resultado ímpar, isto é, $\overline{A}=\{1,3,5\}$

B: resultado inferior a 3, isto é, $B=\{1,2\}$

P(A) = 3/6; resultado da soma de 3 eventos

P(B) = 2/6 = 1/3

Usando (2.5), $\mathrm{P}(\overline{A})=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

Exemplo

Qual o valor de $\mathrm{P}(A \cup B)$?

Pelo teorema da soma:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Exercícios

1.Sendo defeituosos 10% dos rádios produzidos por uma indústria, se forem examinados ,ao acaso, 3 rádios, qual a probabilidade de nenhum ser defeituoso?

2.No jogo de “par ou ímpar”, qual a probabilidade de ocorrer par? Qual a probabilidade de ocorrer um valor maior do que 5?

3.Jogando-se 3 dados. Qual a probabilidade de ser 5 a soma dos pontos obtidos?

4.Dois dados são lançados simultaneamente. Verifique se os eventos “sair valor par em ambos” e “sair soma igual a 5” são independentes?